Pravolinijska površ

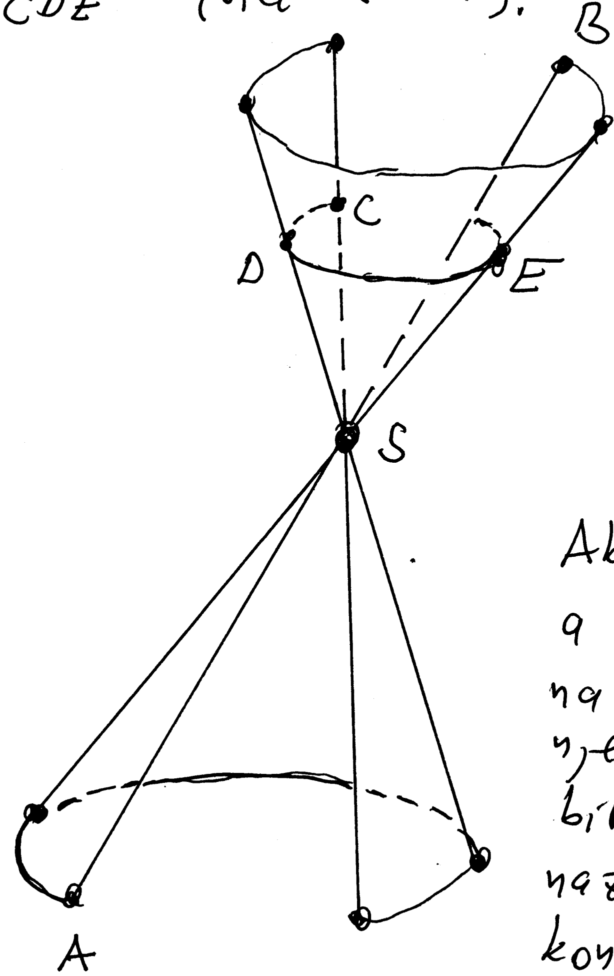
Pravolinijska površ (ili linijska površ) je površ formirana kretanjem prave (izvodnice) po nekoj krivoj (direktrisi). Linijska površ se može tretirati kao skup pravih koje zavise od jednog parametra. Linijske površi mogu biti razvojne ili kose. Razvojne se mogu "izvijanjem" razviti u ravan (npr. cilindar i konus). Tangentna ravan razvojne linijske površi u različitim tačkama jedne iste izvodnice je jedna ista ravan. Kao primjer kose linicke površi navedimo konoid.

Izvodnica (generatrisa) je prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju (direktrisu pravoliniske površi) i formira (opisuje) pravoliniski površ. Ako izvodnica krećući se po direktrisi ostaje cijelo vrijeme paralelna samoj sebi, ona opisuje cilindričnu površ. Ako izvodnica krećući se po direktrisi prolazi stalno kroz jednu istu tačku prostora, ona opisuje konusnu površ.

Direktrisa pravoliniske površi je linija po kojoj se kreće tačka prave koja (prava) opisuje ovu površ. Ako je direktrisa mnogougao, a izvodnica po kretanju ostaje paralelna samoj sebi, pravoliniska površ će biti prizmatična površ.

Cilindarska površ je površ obrazovana kretanjem prave p, koja se premješta paralelno samoj sebi i siječe neku zadanu ravnu krivu w (direktrisu cilindrične površi). Pri tome se prava p naziva generatrisom cilindrične površi. Ako je direktrisa cilindarske površi elipsa, parabola ili hiperbola tada se cilindrična površ naziva redom eliptičkom, paraboličkom ili hiperboličkom. U analitičkoj geometriji cilindrična površ naziva se također cilindrom.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave p tako što ona svo vrijeme prolazi kroz nepokretnu (datu) tačku S i siječe nepokretnu (datu) krivu CDE (vidi sliku).

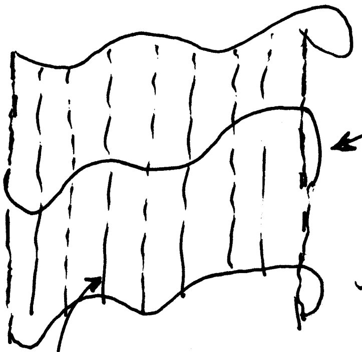


Prava p naziva se izvodnica (generatrisa) konusne površi, tačka S vrh konusne površi, a kriva CDE je direktrisa konusne površi. Konusna površ ima dvije grane, jednu od njih opisuje poluprava SA, drugu poluprava SB.

Ako je direktrisa konusne površi krug, a tačka S se normalnom projekcijom na ravan ovog kruga projektuje u njen centar O, konusna površ je tada obrtna površ koja se često naziva kružni konus ili jednostavno konus.

Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $(x-a)^2 = -k^2(y-b)$; $z=c$ a generatrise su paralelne pravoj $x=mz$; $y=nz$;

R.: Ako intuitivno pokušamo zamisliti ovu površ, ona bi bila



Uzmimo proizvoljnu tačku (x_1,y_1,z_1) na direktrisi. Tada je

$$(x_1-a)^2 = -k^2(y_1-b) \quad \dots(1)$$
$$z_1=c \quad \dots(2)$$

Jednačina prave koja je paralelna generatrisi možemo napisati u obliku $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{1}$

($\vec{p}=(m,n,1)$ vektor pravca)

Tada je jednačina generatrise kroz tačku (x_1,y_1,z_1)

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{1} \quad (=t)$$

(gdje je (x,y,z) tačka na cilindričnoj površi) tj.

$$x_1 = x-mt \quad \dots(3)$$
$$y_1 = y-nt \quad \dots(4)$$
$$z_1 = z-t \quad \dots(5)$$

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Parametra z_1 se možemo "riješiti" ako (2) uvrstimo u (5):

$$c = z-t \quad \Rightarrow \quad t = z-c \quad \dots(6)$$

Parametra t se možemo "riješiti" ako (6) uvrstimo u (3) i (4)

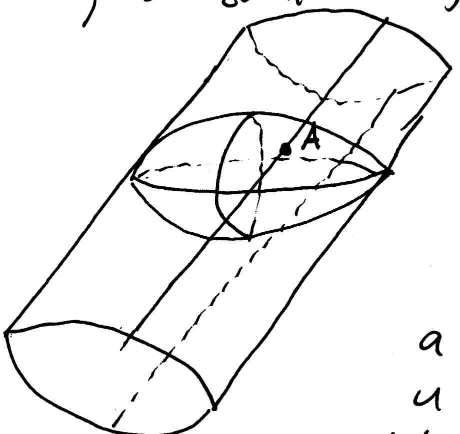
$$x_1 = x-m(z-c) \quad \dots(7)$$
$$y_1 = y-n(z-c) \quad \dots(8)$$

Na kraju ako (7) i (8) uvrstimo u (1) dobićemo traženu jednačinu cilindrične površi

$$[x-a-m(z-c)]^2+k^2[y-b-n(z-c)]=0.$$

Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x = y = z$ i tangiraju elipsoid $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

Rj. Pokušajmo zamisliti izgled tražene cilindrične površi.



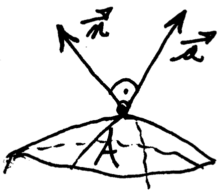
Ako je tačka $A(x_1, y_1, z_1)$ istovremeno na elipsi i na cilindru onda je sa jedne strane

$$x_1^2 + 4y_1^2 + 9z_1^2 = 1 \quad \ldots (1)$$

a sa druge strane je vektor $\vec{a} = (1,1,1)$ u tangentnoj ravni elipsoida u tački A (vektor $\vec{a}$ je paralelan sa vektorom pravca date prave $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$).

Vektor normale tangentne ravni je $\vec{n} = (x_1, 4y_1, 9z_1)$

$\left(F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1, \ \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 8y, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 18z \right)$



Iz uslova normalnosti $\vec{a}$ i $\vec{n}$ izlazi da je

$$x_1 + 4y_1 + 9z_1 = 0. \quad \ldots (2)$$

Jednačina generatrise kroz tačku A je

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{1} \ (= t) \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x - t \\ y_1 &= y - t \\ z_1 &= z - t \end{aligned} \quad \ldots (3)$$

gdje je $B(x,y,z)$ tačka na cilindru.

Eliminišući x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2) i (3) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Ako (3) uvrstimo u (2) dobićemo t izraženo preko x, y i z:

$$(x - t) + 4(y - t) + 9(z - t) = 0$$
$$-14t + x + 4y + 9z = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{14}(x + 4y + 9z).$$

Ako ovako dobijeno t vratimo u (3) dobićemo

$$x_1 = \frac{1}{14}(13x - 4y - 9z)$$

$$y_1 = \frac{1}{14}(-x + 10y - 9z)$$

$$z_1 = \frac{1}{14}(-x - 4y + 5z)$$

Novodobijene vrijednosti uvrstimo u (1):

$$(13x - 4y - 9z)^2 + 4(-x + 10y - 9z)^2 + 9(-x - 4y + 5z)^2 = 14^2$$

$$\begin{aligned} &13^2x^2 + 16y^2 + 81z^2 - 2\cdot 13\cdot 4xy - 2\cdot 13\cdot 9xz + 2\cdot 4\cdot 9yz \\ &\quad + 4(x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 20xy + 180xz - 18yz) \\ &\quad\quad + 9(x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 8xy - 10xz - 40yz) = 14^2 \end{aligned}$$

$$182x^2 + 560y^2 + 630z^2 - 112xy - 252xz - 1008yz = 14^2 \quad /:14$$

$$13x^2 + 40y^2 + 45z^2 - 8xy - 18xz - 72yz - 14 = 0.$$

tražena jednačina cilindrične površi

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o odredjenoj vektorom položaja $\vec{r}_o$ je

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x,y,z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x,y,z,a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu $F(x,y,z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametara a i b iz jednačina

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.